

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

EXAMEN GUÍA DE CÁLCULO – ÁLGEBRA I
(LÍNEA DE MATEMÁTICAS)

Instrucciones. Este examen consta de dos partes, una de Cálculo y otra de Álgebra. Deberá contestar según se le pida en cada parte.

Primera parte, cálculo

Es obligatorio contestar las preguntas de 1. De los ejercicios 2 al 6, conteste únicamente tres de ellos.

1. Conteste brevemente lo que se pide.
 - a) Indique qué es el valor absoluto de un número real.
 - b) ¿En qué consiste el método de inducción matemática y para qué sirve?
 - c) ¿Qué significa que una sucesión infinita $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ converja al número $\ell \in \mathbb{R}$ cuando $n \rightarrow \infty$?
 - d) Escriba la definición de convergencia uniforme de una sucesión de funciones.
 - e) ¿Qué dice la Regla de L'Hospital?
2. Indicar para cuáles $x \in \mathbb{R}$ es cierta la desigualdad

$$\frac{2}{x-2} < \frac{x+2}{x-2} < 1.$$

3. Hallar la derivada de $F(x) = \int_a^{x^3} \frac{1}{1 + \sin^2 t} dt$.
4. ¿En qué puntos de la curva $y = 2 + x - x^2$, la tangente a la misma es paralela al eje X ?
5. Encuentre la serie de Taylor de la función $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
6. Considere la función $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$. Encuentre los puntos singulares, los puntos de inflexión, los intervalos de concavidad y los intervalos de monotonía. Dibuje un esbozo de la gráfica.

Segunda parte, álgebra

Resolver sólo cuatro problemas.

1. Determine las multiplicidades algebraicas y geométricas de los valores propios de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Diagonalizar la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Llevar la matriz dada a su forma canónica de Jordan

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. ¿Cuáles son todos los posibles valores propios de una matriz ortogonal simétrica? Justifique su respuesta.
5. Encontrar una base del núcleo de la transformación lineal dada por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Justifique su respuesta.