

EXAMEN DE ADMISIÓN
MCFM-ESFM IPN
TEMARIO PARA ASPIRANTES EN EL AREA DE FÍSICA MÉDICA
SECCIÓN DE FÍSICA

1. Estructura de la materia.
 - 1.1. Partículas atómicas.
 - 1.2. Modelos atómicos.
 - 1.3. Estabilidad nuclear y tabla de nucleídos.
 - 1.4. Energía de ligadura.
 - 1.5. Moléculas.
2. Radiación.
 - 2.1. Clasificación de la radiación.
 - 2.2. Espectro electromagnético.
 - 2.3. Niveles de energía.
3. Relatividad especial.
 - 3.1. Postulados de la teoría de la relatividad especial.
 - 3.2. Cinemática relativista.
 - 3.3. Transformaciones de Lorentz.
 - 3.4. Momento, fuerza y energía.
 - 3.5. Equivalencia masa-energía.
4. Transformaciones nucleares.
 - 4.1. Decaimiento radiactivo.
 - 4.2. Actividad.
 - 4.3. Decaimientos: alfa, beta y gamma.
 - 4.4. Energía Q de las transformaciones.
5. Rayos X.
 - 5.1. Clasificación de rayos X.
 - 5.2. Generación de rayos X.

- 5.3. Espectro de rayos de X.
- 5.4. Interacción de rayos X con la materia: efecto fotoeléctrico, Compton y producción de pares.
- 5.5. Atenuación exponencial de rayos X.
- 6. Mecánica cuántica.
 - 6.1. Ecuación de onda de Schrödinger.
 - 6.2. Aplicaciones de la ecuación de onda: Partícula libre, pared, caja y pozo de potencial.
 - 6.3. Oscilador armónico simple.
 - 6.4. Principio de incertidumbre.
 - 6.5. Cuantización de la energía y del momento angular.
- 7. Experimentos importantes en la física moderna.
 - 7.1. Describir y explicar los experimentos más relevantes para el desarrollo de los conceptos de la física moderna.
- 8. Mecánica clásica.
 - 8.1 Operaciones con Magnitudes Escalares y Vectoriales.
 - 8.2 Cinemática de la Partícula.
 - 8.2 Rotación de Cuerpos Rígidos.
 - 8.3 Dinámica de un Cuerpo Rígido.
 - 8.4 Aplicaciones de la mecánica clásica en medicina, ejemplos en ortopedia.

Guía para la sección de Matemáticas LGAC: FÍSICA Y MATEMÁTICAS EN MEDICINA

TEMARIOS

Álgebra Lineal

1. Álgebra matricial, determinantes.
2. Espacios vectoriales, dependencia e independencia lineal.
3. Transformaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita.
4. Valores y vectores propios de una matriz.
5. Diagonalización de matrices.
6. Forma canónica de Jordan

Cálculo

1. Derivadas de funciones de una y varias variables y propiedades.
2. Gradiente y derivada direccional de una función real-valuada y multivariable.
3. Integración de funciones de una variable.
4. Integrales de línea de funciones de varias variables.

BIBLIOGRAFÍA

- Steven J. Leon. Linear algebra with applications (9th edition). Pearson, 2015.
- Grossman. Linear algebra (5th edition).
- J. Stewart. Calculus (7th edition). Cengage Learning, 2012.
- Multivariable calculus. Marsden & Tromba, 1993.

ALGUNOS PROBLEMAS SUGERIDOS - ÁLGEBRA

Problema Sean $\vec{x} = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$, este vector puede ser escrito en términos de la base ortonormal (ortogonal y cada vector tiene longitud unitaria) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ con $\vec{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\vec{v}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0)$ y $\vec{v}_3 = (0, 0, 1)$, como $\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3$. Determine α_1 , α_2 y α_3 .

Problema Evalúe los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 9 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -3 & -3 & 1 & 4 \\ -3 & -3 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & \frac{4}{3} \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Problema Determine si los siguientes conjuntos dados forman un espacio vectorial, de no ser así proporcione una lista de los axiomas que no se cumplen.

- El conjunto de matrices $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$ con las operaciones de suma de matrices y multiplicación por un escalar usuales.
- El conjunto de polinomios de grado $\leq n$ con término constante cero.

Problema Determine si los siguientes subconjuntos dados H del espacio vectorial V es un subespacio de V

- $V = \mathbb{R}^2; H = \{(x, y); y = 2x\}$
- $V = \mathbb{R}^2; H = \{(x, y); 4x^2 + 9y^2 \leq 36\}$
- $V = C[a, b]; H = \{f \in C[a, b] : \int_a^b f(x)dx = 1\}$

Problema Determine si el conjunto dado de vectores genera el espacio vectorial dado.

- En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Problema Describa el espacio vectorial generado por los vectores

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Problema Encuentre una condición sobre los números a_{ij} tal que los vectores $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ sean linealmente dependientes.

Problema ¿Para qué valor(es) de α serán linealmente dependientes los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 4 \end{pmatrix}$?

Problema Demuestre que si los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ son linealmente dependientes en $\mathbb{R}^m$, con $m < n$ y si $\vec{v}_{n+1}$ es cualquier otro vector en $\mathbb{R}^m$, entonces el conjunto $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n, \vec{v}_{n+1}$, es linealmente dependiente.

Problema Determine si el conjunto dado es una base para el espacio vectorial a que se refiere.

- En P_2 : $-6 - 2x + 3x^2, -8 - x + 6x^2, -4 - x + 5x^2, 1 - x + x^2$

Problema Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en el plano $3x - 2y + 5z = 0$.

Problema Determine si las transformaciones de V en W dada es lineal

- $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{x}{y} \end{pmatrix}$
- $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x + y \\ y \\ x - y \end{pmatrix}$
- $T: C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$; $Tf = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, donde g es una función fija en $C[0, 1]$

Problema Calcule los valores característicos y los espacios característicos de las matrices dadas. Si la multiplicidad algebraica de un valor característico es mayor que 1, calcule su multiplicidad geométrica.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema Determine si las matrices dadas A son diagonalizables. De ser así, encuentre una matriz C tal que $C^{-1}AC = D$. Verifique que $AC = CD$ y que los elementos distintos de cero de D sean los valores característicos de A .

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Problema Sea $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \sqrt[10]{2} \end{pmatrix}$. Calcule D^{20} .

Problema Si A es una matriz hermitiana de $n \times n$, demuestre que los vectores característicos correspondientes a valores característicos distintos son ortogonales.

ALGUNOS PROBLEMAS SUGERIDOS - CÁLCULO

Problema Considere los vectores $\vec{a} = (1, 5)$ y $\vec{b} = (-3, 2)$ en $\mathbb{R}^2$. Determine lo siguiente:

- Calcule $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ y $4\vec{a}$ y represente los vectores con un dibujo.
- Determine la longitud de $\vec{a}$ y la longitud de $\vec{b}$.
- Determine el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
- Determine la proyección de $\vec{a}$ a lo largo de $\vec{b}$ y la proyección de $\vec{b}$ a lo largo de $\vec{a}$.

Problema Sea V el espacio vectorial de funciones real valuadas y continuas definidas en el intervalo $[-a, a]$ con $0 < a \in \mathbb{R}$ con la suma y multiplicación usuales, es decir $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ y $(\alpha f)(x) := \alpha(f(x))$, con $f \in V$, $g \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Un producto interno en este espacio vectorial se define como una función real valuada $\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

- $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$.
- $\langle f, g + h \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$.
- $\langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle = \langle f, \alpha g \rangle$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\langle f, f \rangle \geq 0$ y $\langle f, f \rangle = 0$ si y sólo si $f = 0$ (función idénticamente cero).

Considere la siguiente función:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-a}^a f(x)g(x)dx.$$

Resuelva lo siguiente:

- Demuestre que la función anterior es un producto interno en el espacio vectorial V .
- Motivados por este producto interno ¿Cómo podríamos definir una norma en V .
- Si $f(x) = x$ y $g(x) = x^3$, calcule $\langle f, f \rangle$, $\langle g, g \rangle$ y $\langle f, g \rangle$.
- ¿Cuál sería la norma de la función $f(x) = x$ y de la función $g(x) = x^3$.

Problema Decidir cual de las siguientes sucesiones son convergentes. Si convergen, determinar el límite.

- $\left\{ \left(\frac{1}{n^2}, 1 + (-1)^n \right) \right\}$
- $\left\{ \left(\frac{1}{2^n}, (2)^{-n}, 0 \right) \right\}$

- $\{(n^{-n}, \pi^{-2n}, \cos(\pi n))\}$
- $\{(\frac{1}{n}\sin(n\pi), \cos(\frac{\pi}{n}), \sin(\frac{\pi}{n^2}))\}$

Problema Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

- (a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{para } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{para } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
- (b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{para } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{para } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Determine los puntos/intervalos de continuidad y/o discontinuidad.

Problema Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones y también calcular el gradiente:

- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$
- $f(x, y, z) = z^{(x^2+y^2)}$
- $f(x, y, z) = x^{y^z}$
- $f(x, y) = \int_0^{xy} \sqrt{1+s^2} ds$

Problema Determine las derivadas de f por medio de las derivadas de g y h si:

- $f(x, y) = g(x + y)$
- $f(x, y) = g(x)^{h(y)}$
- $f(x, y) = \int_0^{g(x)h(y)} \sqrt{1+s^2} ds$

Problema Probar que si $z = xy + xe^{y/x}$, entonces $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

Problema Determine la matriz Jacobiana de las siguientes funciones:

- $f(x, y) = (x^5 \sin y, e^{x+y})$
- $f(x, y, z) = (x^2 y^2 z^2, \ln(x + y + z))$
- $f(x, y) = (\int_0^{\sin(x+y)} s ds, \int_0^{\sin(x+y)} s^2 ds, \int_0^{\sin(x+y)} s^3 ds)$

Problema Sea $f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$. Mostrar que el plano tangente a la gráfica de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es ortogonal al vector $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Describa geoméricamente que significa esto.

Problema Determine la ecuación para el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ para:

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x - y + 2$ en $(x_0, y_0) = (1, 1)$.
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $(x_0, y_0) = (1, 1)$.
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \ln(x + y) + x \cos y + \arctan(x + y)$ en $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

Problema Calcular una ecuación para los planos tangentes a las siguientes superficies en los puntos indicados:

- $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ en $(1, 1, 1)$.
- $x^3 - 2y^3 + z^3 = 0$ en $(1, 1, 1)$.
- $e^{xyz} = 1$ en $(1, 1, 0)$.

Problema ¿En qué dirección es igual a cero la derivada direccional de $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ en $(1, 1)$?

Problema Hallar la derivada direccional de la función dada en el punto dado y en la dirección del vector dado.

- $f(x, y, z) = e^x \cos(yz)$ en $\vec{p}_0 = (0, 0, 0)$ y $\vec{v} = (2, 1, -2)$.
- $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ en $\vec{p}_0 = (1, 1, 2)$ y $\vec{v} = (10, -1, 2)$.

Problema Un insecto se halla en un medio ambiente tóxico. El nivel de toxicidad está dado por $T(x, y) = 2x^2 - 4y^2$. El insecto está en $(-1, 2)$ ¿En qué dirección deberá moverse para disminuir lo más rápido posible la toxicidad?

Problema En el tiempo $t = 0$, se lanza una partícula desde el punto $(1, 1, 1)$ sobre la superficie de $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ en una dirección normal a la superficie con una rapidez de 10 unidades por segundo. ¿En qué instante cruza la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 103$.

Problema Determinar la formula de Taylor de primer orden para la función dada alrededor del punto dado (x_0, y_0) .

- $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$ en $(0, 0)$.
- $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2} \cos(xy)$ en $(0, 0)$.
- $f(x, y) = e^{(x-1)^2} \cos y$ en $(1, 0)$.

Problema Evalúe la integral de línea, sobre la curva C determinada.

- $\int_C 2xe^x dx$, con C el segmento de recta de $(0, 2)$ a $(2, 6)$.
- $\int_C \sqrt{4x^2 + y} dx$, donde C es la porción de $y = x^2$ de $(2, 4)$ a $(0, 0)$.
- $\int_C (3y + \operatorname{sen}(x + 2)) dx$ donde C es la porción de $x = y^2$ de $(1, 1)$ a $(1, -1)$.
- $\int_C \operatorname{sen}(x^2 + z) dy$ donde C es la porción de $y = x^2$ en el plano $z = 2$ desde $(1, 1, 2)$ hasta $(2, 4, 2)$.